

IRRAZIONALI

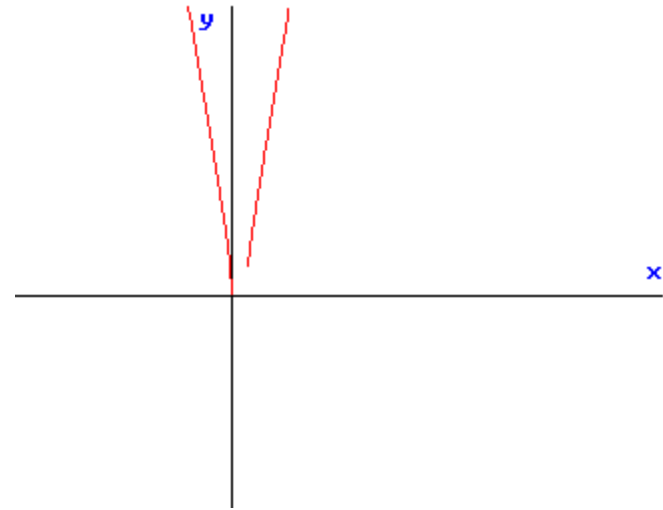
$$y = \sqrt[k]{P_n(x)} \quad \textbf{\textit{k\ pari}}$$

$$y = \sqrt{3x^2 - 2x}$$

$$\textbf{\textit{n = 2}}$$

$$\textbf{\textit{k = 2}}$$

radice quadrata



IRRAZIONALI

$$y = \sqrt[k]{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}} \quad \textbf{\textit{k pari}}$$

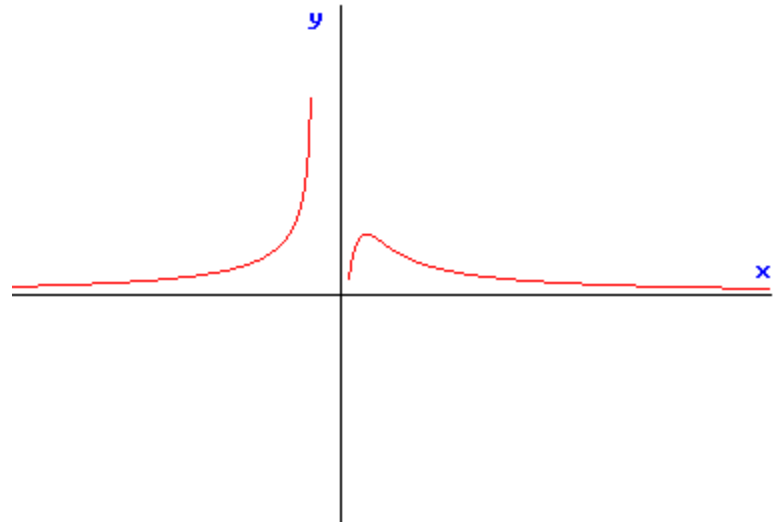
$$y = \sqrt{\frac{3x-1}{x^3+2}}$$

$$\textbf{\textit{n}} = \textbf{1}$$

$$\textbf{\textit{m}} = \textbf{3}$$

$$\textbf{\textit{k}} = \textbf{2}$$

radice quadrata



Esempio 1

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$\begin{aligned} C.E. &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2, x \geq +2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2, +2 \leq x < +\infty\} \end{aligned}$$



**occorre imporre il radicando positivo
(la radice quadrata di un numero
negativo non esiste in $\mathbb{R}$!!!)**

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2, x > +2 \text{ (sempre in C.E.)}$$



	- 2	+ 2	
+++++	-----	+++++	
$y > 0$	y non esiste	$y > 0$	

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{-4} \end{cases}$$

non esistono intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (-2, 0) \\ B = (+2, 0) \end{cases}$$

intersezioni con l'asse x

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2, +2 \leq x < +\infty\}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)} = +\infty$$

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$



la funzione data non ha *asintoti orizzontali*

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$D\left\{\sqrt[n]{[f(x)]^m}\right\} = D\left\{[f(x)]^{\frac{m}{n}}\right\} = \frac{m}{n} \cdot [f(x)]^{\frac{m}{n}-1} \cdot D[f(x)]$$



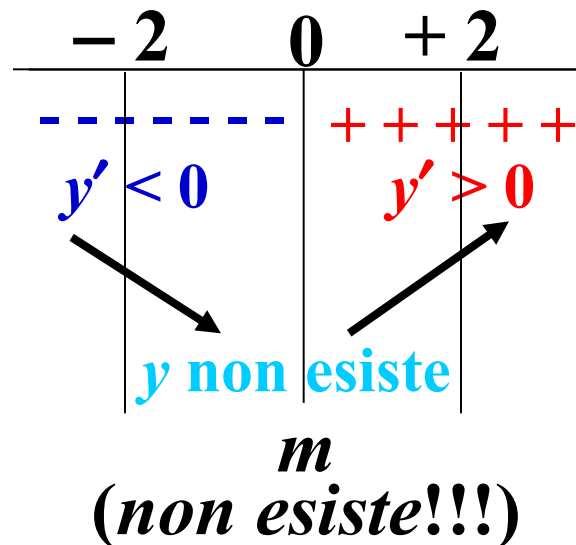
$$\begin{aligned} D\left[\sqrt{x^2 - 4}\right] &= D\left[(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 4)^{\frac{1}{2}-1} \cdot D(x^2 - 4) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{sempre in C.E.} \end{cases}$$



$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



non ha né *massimi* né *minimi*

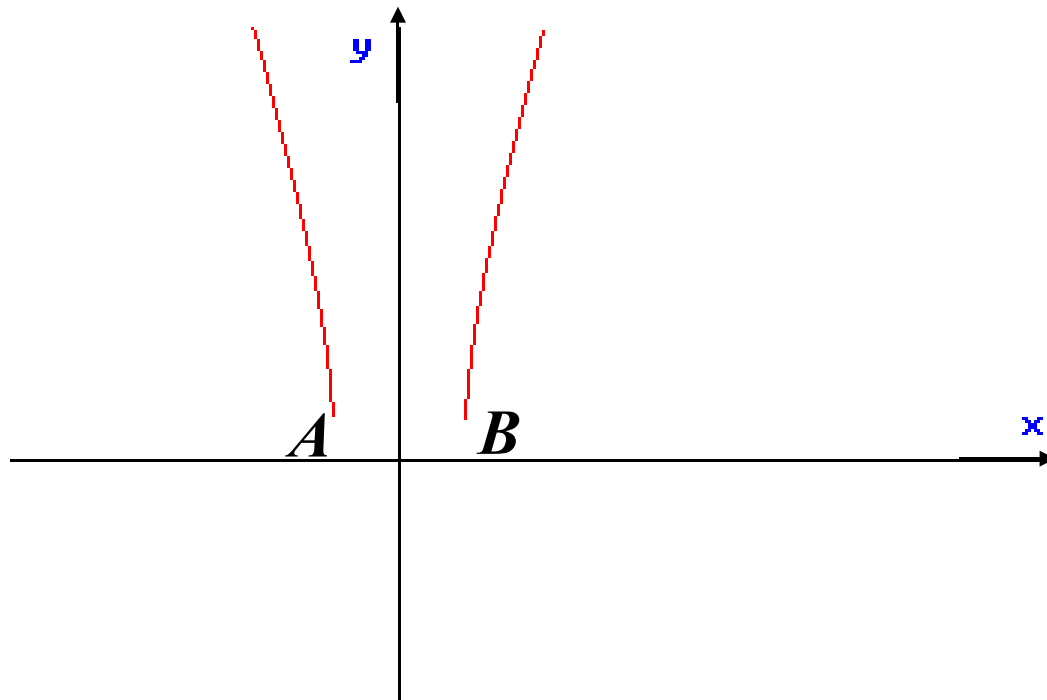


decresce per $x < -2$ e cresce per $x > +2$

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



1) Grafico della funzione



Esempio 2

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}$$



1) Determinazione del campo di esistenza (C.E.)

$$\begin{aligned} C.E. &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 10}{x + 7} \geq 0, x + 7 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x^2 - 10 \geq 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases}, x \neq -7 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \leq -\sqrt{10}, x \geq +\sqrt{10} \\ x > -7 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

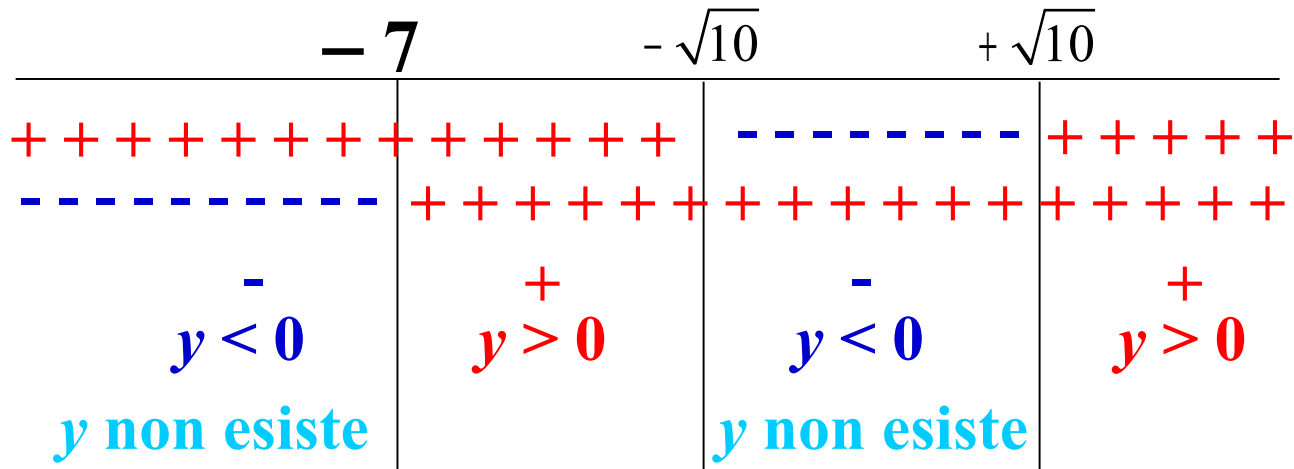


$$x = -7 \text{ A.V.}$$

(annulla il denominatore della frazione!)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \leq -\sqrt{10}, x \geq +\sqrt{10} \\ x > -7 \end{cases} \right\}$$


 $\pm \sqrt{10} \cong \pm 3,16$



$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -7 < x \leq -\sqrt{10}, +\sqrt{10} \leq x \leq +\infty \right\}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}$$



1) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 10}{x + 7} > 0 \Leftrightarrow \text{sempre in C.E.}$$



**la funzione è sempre positiva
dove è definita**

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}$$



1) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{-\frac{10}{7}} \end{cases}$$

non esistono intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (-\sqrt{10}, 0) \\ B = (+\sqrt{10}, 0) \end{cases}$$

intersezioni con l'asse x

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}$$



1) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -7 < x \leq -\sqrt{10}, +\sqrt{10} \leq x \leq +\infty \right\}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 10}{x + 7} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)} = +\infty$$



la funzione data non ha *asintoti orizzontali*

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}$$



1) Calcolo della derivata prima

$$D\left[\sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}\right] = D\left[\left(\frac{x^2 - 10}{x + 7}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2 - 10}{x + 7}\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot D\left(\frac{x^2 - 10}{x + 7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2 - 10}{x + 7}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{2x \cdot (x + 7) - (x^2 - 10) \cdot 1}{(x + 7)^2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x^2 - 10}{x + 7}\right)}} \cdot \left[\frac{2x^2 + 14x - x^2 + 10}{(x + 7)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x^2 - 10}{x + 7}\right)}} \cdot \left[\frac{x^2 + 14x + 10}{(x + 7)^2}\right] =$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}$$



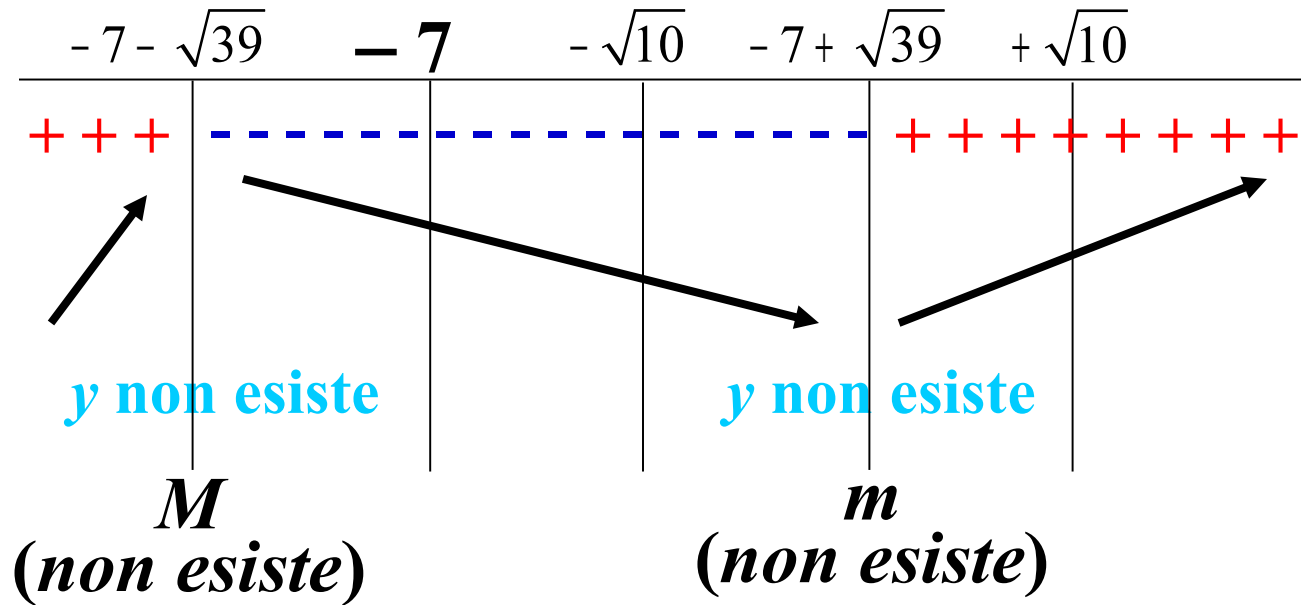
1) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x^2 - 10}{x + 7}\right)}} \cdot \left[\frac{x^2 + 14x + 10}{(x + 7)^2} \right] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + 10 > 0 \\ (x + 7)^2 > 0 \\ \sqrt{\left(\frac{x^2 - 10}{x + 7}\right)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 10 > 0 \\ \text{sempre} \\ \text{sempre in C.E.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -7 - \sqrt{39}, x > -7 + \sqrt{39} \\ \text{sempre} \\ \text{sempre in C.E.} \end{cases} \Leftrightarrow x < -7 - \sqrt{39}, x > -7 + \sqrt{39}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x < -7 - \sqrt{39}, x > -7 + \sqrt{39}$$

$$\downarrow \begin{aligned} -7 - \sqrt{39} &\cong -13,24 \\ -7 + \sqrt{39} &\cong -0,75 \end{aligned}$$



$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}$$



non ha né *massimi* né *minimi*

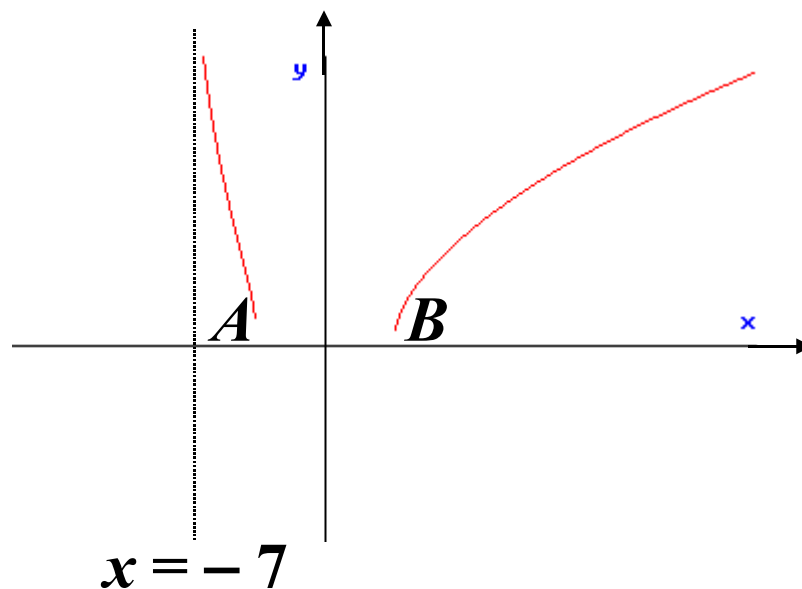


**decresce per $-7 < x < -\sqrt{10}$
cresce per $x > \sqrt{10}$**

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 10}{x + 7}}$$



1) Grafico della funzione



Osservazioni!

Le funzioni irrazionali con indice di radice pari sono definite nei punti in cui il radicando risulta positivo (≥ 0); nel caso di una irrazionale fratta occorre porre anche il denominatore diverso da zero

Le funzioni irrazionali con indice di radice pari sono sempre positive nel *C.E.*

Le eventuali intersezioni con gli assi vanno ricercate all'interno del *C.E.*: non è detto che per $x = 0$ la funzione sia definita!!!

Osservazioni!

Per studiare i limiti basta determinare il limite del radicando e poi estrarre la radice del valore trovato

Per studiare il segno della derivata prima della funzione è sufficiente studiare il segno della derivata prima del radicando (il suo denominatore sarà sempre una radice con indice di radice pari, quindi positiva nel *C.E.*)